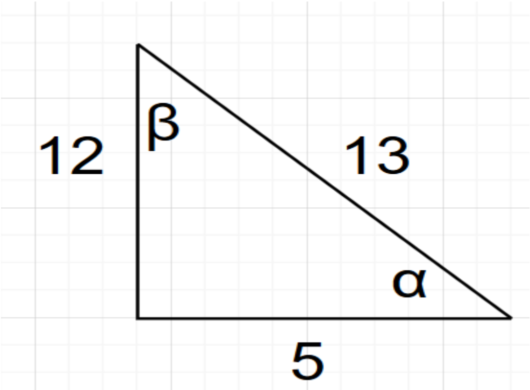
Rozwiązania oraz pytania proszę na maila: ulanik1968@o2.pl . Proszę podawać swoje imię, nazwisko i klasę.

Temat: Związki między funkcjami trygonometrycznymi.

- Zad. (do samodzielnego zrobienia w ramach powtórzenia)
  Wiedząc, że sinα = $\frac{4}{5}$ i α jest kątem ostrym, oblicz cosα, tgα i ctgα.
  Powinieneś otrzymać: cosα = $\frac{3}{5}$, tgα =$\frac{4}{3}$, ctgα =$\frac{3}{4}$.

- Przypomnij sobie.
  Obliczmy wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych dla narysowanego trójkąta prostokątnego.



sinα = $\frac{12}{13}$,   cosα =$\frac{5}{13}$,   tgα =$\frac{12}{5}$,   ctgα = $\frac{5}{12}$
sinβ = $\frac{5}{13}$,   cosβ =$\frac{12}{13}$,   tgβ = $\frac{5}{12}$,   ctgβ = $\frac{12}{5}$.
Zauważ:
sinα = cosβ,   cosα = sinβ,   tgα = ctgβ,   ctgα = tgβ.

Wiemy, że w trójkącie prostokątnym: α + β = 90^0, a więc:

(*) sinα = cos(90^0 – α)   i   cosα = sin(90^0 – α).

Np. sin30^0=cos(90^0 - 30^0)=cos60^0=$\frac{1}{2}$, czyli sin30^0= cos60^0=$\frac{1}{2}$ (co już wiesz z małej tabelki).
sin60^0= cos(90^0 - 60^0)=cos30^0=$\frac{\sqrt{3}}{2}$, czyli sin60^0= cos30^0=$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (co już wiesz z małej tabelki).
Np. sin20^0=0,3420 (tabela str. 388, podr.)
Skorzystajmy z (*) i obliczmy: sin20^0 = cos(90^0 – 20^0) = cos70^0 = 0,342.
Np. cos47^0 = sin(90^0 – 47^0) = sin43^0 = 0,6820.

Zapamiętaj! (wniosek – str. 155, podr.)
sinα = cos(90^0 – α)
cosα = sin(90^0 – α).

Zapoznaj się: przykład 2/155, podr.

- **Dla kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym zachodzą następujące równości:**
  1. **$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (tzw. jedynka trygonometryczna)**
  2. **tgα = $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$**
  3. **ctgα = $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$**
  4. **tgα · ctgα = 1, ctgα = $\frac{1}{\text{tg}\alpha}$**

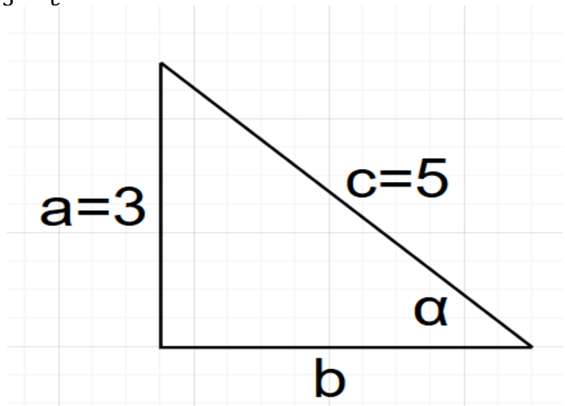
Przykład 1

Wiedząc, że sinα = $\frac{3}{5}$ i α jest kątem ostrym, oblicz cosα, tgα i ctgα.

Rozwiązanie:

I sposób (korzystamy z metody poznanej na poprzednich lekcjach i przypomnianej w zadaniu na początku dzisiejszych zajęć)

sinα = $\frac{3}{5} = \frac{a}{c}$, a = 3, c = 5 i umieszczamy na rysunku



Korzystając z tw. Pitagorasa: $3^2 + b^2 = 5^2$

$b = 4$

Możemy więc obliczyć: Odp. cosα = $\frac{4}{5}$, tgα = $\frac{3}{4}$, ctgα = $\frac{4}{3}$.

II sposób

Wiemy, że sinα = $\frac{3}{5}$. Skorzystamy z jedynki trygonometrycznej: **(*)1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$** i podstawimy za sinα wartość $\frac{3}{5}$**:**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{25}{25} - \frac{9}{25}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}},$$ wiemy, że sinα>0, cosα>0, tgα>0 i ctgα>0.

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

Korzystając z (*)**2. $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$** otrzymujemy:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}.$$

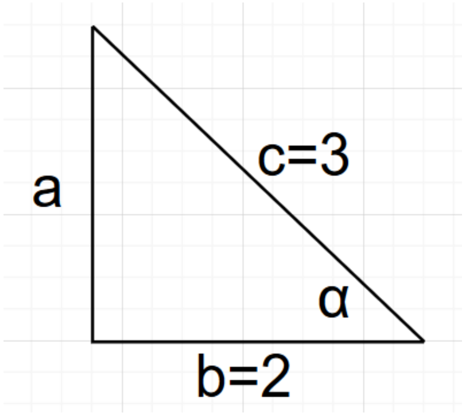
Korzystając z (*)**4. ctgα = $\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$** otrzymujemy**:** ctgα = $\frac{4}{3}$.

Odp. cosα = $\frac{4}{5}$, tgα = $\frac{3}{4}$, ctgα = $\frac{4}{3}$.

Przykład 2

Wiedząc, że $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ i α jest kątem ostrym, oblicz $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$.

I sposób (patrz rys.)



$\cos\alpha = \frac{2}{3} = \frac{b}{c}$, b = 2, c = 3.

Korzystając z tw. Pitagorasa: $a^2 + 2^2 = 3^2$

$$a^2 = 9 - 4$$
$$a^2 = 5$$
$$a = \sqrt{5}$$

Z definicji funkcji trygonometrycznych (rysunek):

Odp. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

II sposób

Wiemy, że $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Skorzystamy z jedynki trygonometrycznej: **(*)1.** $\boldsymbol{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ i podstawimy za sinα wartość $\frac{2}{3}$:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin^2\alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$
$$\sin^2\alpha + \frac{4}{9} = 1$$
$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{9}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{9}{9} - \frac{4}{9}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{5}{9}$$
$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Korzystając z (*)**2.** $\boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Korzystając z (*)**4.** $\boldsymbol{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}$ otrzymujemy: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

.

Odp. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Zadania do samodzielnego zrobienia: Zad. 6.3a, b, c/159 podr. (proszę wybrać sposób I lub II)

Zad. 6.4a,b, d/159 podr. (najlepiej I sposobem)