Rozwiązania oraz pytania proszę na maila: ulanik1968@o2.pl . Proszę podawać swoje imię, nazwisko i klasę.

Temat: Tożsamości trygonometryczne

- ✓ Przypomnij sobie

Dla kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym zachodzą następujące równości:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (tzw. jedynka trygonometryczna)
2. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
3. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
4. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$
5. $\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha)$, $\cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha)$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90^0 - \alpha)$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^0 - \alpha)$

- Przykład 1

Uzasadnij tożsamość: $\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha$

Rozwiązanie

Uzasadnić tożsamość: przekształcić jedną stronę (lub obydwie), tak aby otrzymać równość prawdziwą.

Lewa strona (L):

$L = -\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha =$ *(sprowadzamy do wsp. mianownika)*

$= \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha} =$ *(zapisujemy na wspólnej kresce ułamkowej)*

$= \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha} =$ *(przekształcamy jedynkę trygonometryczną*

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$)

$= \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$

Prawa strona (P):

$P = \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha =$ *(podstawiamy 2.* $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$)

$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha =$

$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{1} =$

$= \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = L,$ *(co kończy uzasadnienie, bo wykazaliśmy, że lewa strona jest równa prawej)*

- Przykład 2

Uzasadnij tożsamość $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$.

Rozwiązanie

$L = (\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2 =$ *stosujemy wzory skróconego mnożenia:* $(a+b)^2= a^2+2ab+b^2$

$=\sin^2\alpha + \cancel{2\sin\alpha\cos\alpha} + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cancel{- 2\sin\alpha\cos\alpha} + \cos^2\alpha =$ *redukujemy wyr. podobne*

$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha =$ stosujemy jedynkę tryg.

$=1+1=$

$=2 = P$ *(co kończy uzasadnienie)*

- ✓ Zad.1 (do samodzielnego zrobienia)
  Uzasadnij tożsamość
  $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha) = \cos^2\alpha$

- ✓ Zad. 2 (do samodzielnego zrobienia)
  Uzasadnij tożsamość
  $tg\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

- ✓ Przykład 3
  Oblicz wartość wyrażenia (nie korzystaj z tablic trygonometrycznych i kalkulatora)
  a) $\sin^2 20^0 + \sin^2 70^0 =$ (korzystamy z 5. $\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha)$)
  $= \cos^2(90^0 - 20^0) + \sin^2 70^0 =$
  $= \cos^2 70^0 + \sin^2 70^0 =$ (Zastosujemy *jedynkę trygonometryczną*
  1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, dla $\alpha = 70^0$)

  = 1

  b) $tg40^0 \cdot tg50^0 =$ (stosujemy 5. $tg\alpha = ctg(90^0 - \alpha)$)
  $= ctg(90^0 - 40^0) \cdot tg50^0 =$
  $= ctg50^0 \cdot tg50^0 =$ (stosujemy 4. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$)
  $= 1$

- ✓ Zad. 3 (do samodzielnego zrobienia)
  Oblicz wartość wyrażenia (nie korzystaj z tablic trygonometrycznych i kalkulatora)
  $\sin^2 61^0 + \sin^2 29^0 =$

Pytania i samodzielnie wykonane zadania proszę przysyłać do 27.03.2020