

Zag_8

Temat. Środkowa boku trójkąta.

- ✓ Powtórzenie: środek odcinka

Środkiem odcinka o końcach $A = (x_A; y_A)$ i $B = (x_B; y_B)$ jest punkt $S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

- Przykład 1

Wyznacz środek odcinka o końcach $A = (5; -8)$ i $B = (9; -6)$

Rozwiązanie

$$S = \left(\frac{5+9}{2}; \frac{-8-6}{2}\right)$$

$$S = \left(\frac{14}{2}; \frac{-14}{2}\right)$$

$$S = (7; -7)$$

Odp. $S = (7; -7)$

- ✓ Powtórzenie: długość odcinka

- Przykład 2

Oblicz długość odcinka o końcach $A = (1; 2)$ i $B = (5; -1)$.

Rozwiązanie

$$|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Odp. $|AB| = 5$

- ✓ Powtórzenie: wyznaczanie równania prostej przechodzącej przez dwa punkty

Równanie prostej w postaci kierunkowej: $y = ax + b$

- Przykład 3

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (-7; 5)$ i $B = (-4; -1)$

Rozwiązanie

Wyznaczyć równanie prostej (*) $y = ax + b$, tzn. obliczyć współczynniki a i b . W tym celu do równania (*) podstawiamy współrzędne punktów A i B tworząc układ równań.

$$\begin{cases} 5 = -7a + b / -1 \\ -1 = -4a + b \\ \begin{cases} 7a - b = -5 \\ -4a + b = -1 \end{cases} \\ 3a = -6 // :3 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$5 = -7 \cdot a + b$$

$$5 = -7 \cdot (-2) + b$$

$$5 = 14 + b$$

$$5 - 14 = b$$

$$-9 = b$$

Odp. $y = -2x - 9$

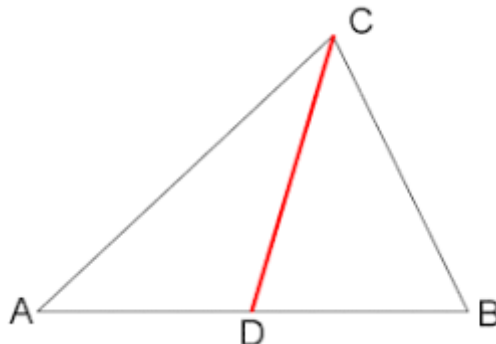
✓ Definicja (ZAPAMIĘTAJ!)

Środkową boku trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

Trójkąt ma trzy różne środkowe.

Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Dzieli on każdą z nich w stosunku 2:1 licząc od wierzchołka.

(przez środkową boku trójkąta często będziemy też rozumieć prostą zawierającą ten odcinek)

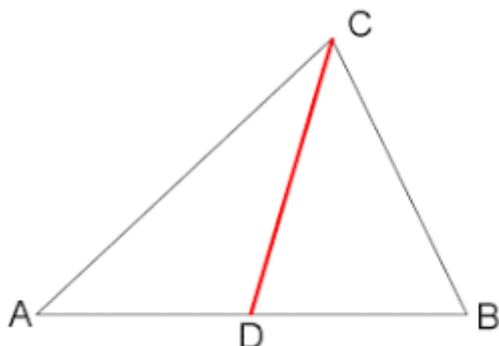


✓ Zapoznaj się z Przykład 3 / 91 podr.

✓ Przykład 4

Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-4;5)$, $B = (-1;4)$, $C = (2;1)$. Wyznacz równanie środkowej boku AB.

Rozwiązanie



Równanie środkowej boku AB to równanie prostej przechodzącej przez środek boku AB (punkt D) i przeciwległy wierzchołek (punkt C).

Krok 1

Wyznaczamy punkt D, czyli środek boku AB

$$S = D = \left(\frac{-4-1}{2}; \frac{5+4}{2} \right)$$

$$D = \left(-\frac{5}{2}; \frac{9}{2} \right)$$

Krok 2

Wyznaczamy równanie środkowej, czyli prostej przechodzącej przez punkty $C = (2;1)$ i $D = \left(-\frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right)$;

$\frac{9}{2}$)

Podstawiamy współrzędne tych punktów do równania $y = ax + b$

$$\begin{cases} 1 = 2a + b \\ \frac{9}{2} = -\frac{5}{2}a + b/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 2a + b & /-2 \\ 9 = -5a + 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 = -4a - 2b \\ 9 = -5a + 2b \end{cases}$$

$$7 = -9a$$

$$-9a = 7 // -9$$

$$a = -\frac{7}{9}$$

podstawiamy np. do pierwszego równania $1 = 2a + b$

$$1 = 2 \cdot \left(-\frac{7}{9}\right) + b$$

$$1 = -\frac{14}{9} + b$$

$$1 + \frac{14}{9} = b \quad \left(1 = \frac{9}{9}\right)$$

$$b = \frac{23}{9}$$

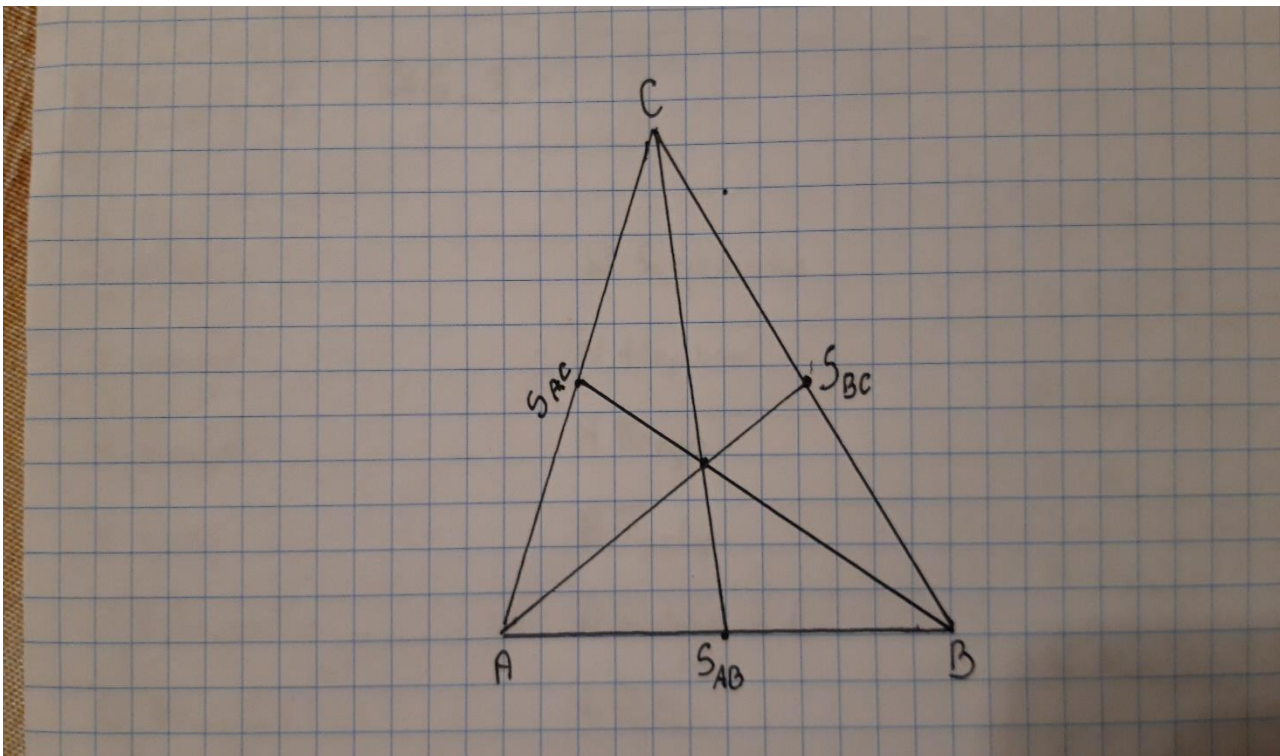
Odp. $y = -\frac{7}{9}x + \frac{23}{9}$

▪ Przykład 5

Oblicz długość środkowych trójkąta ABC, jeśli $A = (-2;-4)$, $B = (2;-1)$, $C = (0;-2)$

Polecenie sformułowane w ten sposób oznacza, że należy obliczyć długości trzech odcinków będących środkowymi w danym trójkącie.

Rysunek pomocniczy



- Środkowa boku AB
Wyznaczamy środek boku AB

$$S_{AB} = \left(\frac{-2+2}{2}; \frac{-4-1}{2}\right)$$

$$S_{AB} = \left(0; -\frac{5}{2}\right)$$

Obliczamy długość środkowej boku AB (odcinka CS)

$$|CS| = \sqrt{(0-0)^2 + \left(-\frac{5}{2}+2\right)^2} = \sqrt{0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

- Środek boku AC

Wyznaczamy środek boku AC

$$S_{AC} = \left(\frac{-2+0}{2}; \frac{-4-2}{2}\right)$$

$$S_{AC} = (-1; -3)$$

Obliczamy długość środkowej boku AC (odcinka BS)

$$|BS| = \sqrt{(-1-2)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

- Środek boku BC

Wyznaczamy środek boku BC

$$S_{BC} = \left(\frac{2+0}{2}; \frac{-1-2}{2}\right)$$

$$S_{BC} = \left(1; -\frac{3}{2}\right)$$

Obliczamy długość środkowej boku BC (odcinka AS)

$$|AS| = \sqrt{(1+2)^2 + \left(-\frac{3}{2}+4\right)^2} = \sqrt{9 + \left(-1\frac{1}{2}+4\right)^2} = \sqrt{9 + \left(2\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{61}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$$

Odp. długości środkowych w tym trójkącie mają długości: $\frac{1}{2}$, $\sqrt{13}$, $\frac{\sqrt{61}}{2}$.

✓ Zadania do samodzielnego zrobienia

- Zad. 1 Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-4;5)$, $B = (-1;4)$, $C = (2;1)$. Wyznacz równanie środkowej boku AC. (na podstawie Przykład 4)
- Zad. 2 Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-4;5)$, $B = (-1;4)$, $C = (2;1)$. Wyznacz równanie środkowej boku BC. (na podstawie Przykład 4)
- Zad. 4.5 a / 94 podr. (na podstawie Przykład 5)

Pytania i samodzielnie wykonane zadania proszę przysyłać do 24.04.2020